TD Maple 3 : Développements asymptotiques

Michael Monereau

5 décembre 2010

1 Développements limités et développements asymptotiques

Maple fournit des outils puissants permettant de calculer des développements limités et asymptotiques. Cela permet de faire des calculs qui seraient beaucoup trop longs à la main, comme on va le voir dans la suite.

Voyons d'abord comment bien utiliser ces fonctionnalités.

Essentiellement, il suffit de savoir utiliser la fonction `series`.

Disons qu'on veut faire un DL de la fonction `f(x)` autour de `x = a` à l'ordre 4, alors on fait simplement :

```
series(f(x), x = a, 4);
```

Si on veut en faire un développement asymptotique en $+\infty$ à l'ordre 4 :

```
series(f(x), x = infinity, 4);
```

Cela fournit généralement une expression qui contient un O, du style `... + O(x`^{d}`)`. Il peut être utile d'enlever ce O pour manipuler le résultat. Pour cela, on utiliser la fonction `convert (..., 'polynom')`. On obtient alors un polynôme (en `x` ou en `1/x` selon le développement) qu'on peut ensuite manipuler comme un polynôme habituel (fonctions `coeff`, etc.).

Remarque : Si le polynôme est en `1/x`, il faut alors le passer en degré positif par un `subs(x = 1/Z,...)` pour pouvoir le manipuler comme un polynôme.

Question 1.1. Exemple

Faire une procédure qui prend en entrée une fonction f, une valeur a et un entier `n` et qui affiche sur un unique graphe la fonction f ainsi que ses polynômes approximants de Taylor en a, de degré 1 à n.

Regarder le résultats sur quelques exemples de votre cru.

Question 1.2. Exemple 2

Trouver le développement limité en 0 à l'ordre 5 de la fonction $x \mapsto \int_1^x e^{-t^3} \mathrm{d}t$.

Indication : Pour éviter des `warnings` (selon comme vous écrivez), on pourra utiliser `assume`. C'est une bonne occasion d'aller voir comment les hypothèses fonctionnent par `?assume`.

2 DL/DA implicites

2.1 Méthode

Supposons qu'on ait à faire le développement de la fonction u en fonction de x sachant qu'elle vérifie l'équation :

$$\forall x, \quad f(u(x)) = v(x)$$

(f et v sont connues, les ensembles de définition dépendant évidemment du contexte).

Pour trouver un développement limité de u, on procède par ré-injection : si on connaît u jusqu'à une certaine précision, ie. $u(x) = h(x) + o_{x\to a}(h(x))$ où h est une fonction connue, alors on pose $u(x) = h(x) + \varepsilon(x)$ où ε est inconnue. Puis on injecte :

$$f(h(x) + \varepsilon(x)) = v(x)$$

On peut alors demander à Maple de faire le développement limité de f lorsque x tend vers a. Alors, en remplaçant x par $\varepsilon(x)$, on obtient une équation sur ε qui permet de trouver son expression (en prenant garde à l'ordre des expressions en présence).

Ainsi, on obtient une nouvelle expression

$$u(x) = h(x) + \varepsilon(x) + \varepsilon_2(x)$$

où ε est maintenant connue et ε_2 est à nouveau un $o(\varepsilon_2(x))$ inconnu qu'on récupère par injection.

Noter qu'il faut prendre garde à la régularité de u (on en cherche un DA/DL !) et de f (les développements limités demandés à Maple vont de plus en plus loin).

2.2 Applications

Question 2.1. Lambert Wilson

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $u(x) \in \mathbb{R}^+$ tel que $u(x)e^{u(x)} = x$.
2. Montrer que la fonction $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ainsi définie est $\mathcal{C}^\infty$.
3. Donner un développement limité à 3 termes de $u(x)$ lorsque $x \to 0$.
4. Pour vérifier votre développement, trouver une expression "exacte" de u par `solve`, puis en obtenir un DL par `series`.

Question 2.2. Polynôme

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $u(x) \in \mathbb{R}^+$ tel que $u(x)^5 + u(x)^2 + u(x) = x$.
2. Donner un développement asymptotique à trois termes de $u(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Question 2.3. Une suite

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n \geq 3}$.
3. Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n lorsque $n \to +\infty$.

Question 2.4. Maximum

Donner un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de :

$$\max_{0 \leq x \leq n} \left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right)$$