TD Maple : Oraux 4

Michael Monerau

16 juin 2011

1 Rappel important !

Attention, n'utilisez toujours QUE l'interface “vieille”, ie. celle où on écrit en rouge. La “nouvelle interface” est inutilisable un jour d'oral car elle entraine des bugs lamentables et fourbes (genre multiplications à la place d'appel de fonctions, etc.).

Pour cela, il faut passer les inputs en mode `Maple Notation` dans “Options/Affichage”, puis “Appliquer globalement”, pour ensuite recréer un nouveau document.

De plus, lorsque vous avez le choix, lancez toujours *Maple Classic* plutôt que le Maple dernière version. Cela ne change que l'apparence et vous évitera des déboires inutiles.

2 Exo Centrale

Soit p un nombre premier. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, p-1\}$, on pose :

$$p_k = \frac{(p-1)!}{k(p-k)}$$

Question 2.1. Cette question est à traiter à l'aide du logiciel de calcul formel. Les instructions `ithprime` ou `isprime` de Maple peuvent être utiles.

(a) Étudier la divisibilité de l'entier $\sum_{k=1}^{p-1} p_k$ par p pour les 20 premiers nombres premiers.

(b) On note $\frac{a_p}{b_p}$ la fraction irréductible représentant le rationnel $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$. Étudier la divisibilité de a_p par p^2 pour les 20 premiers nombres premiers.

Question 2.2. On suppose que le nombre premier p est supérieur ou égal à 5 et on se place dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On note $\overline{k}$ la classe d'un entier $k \in \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(a) Montrer que $\overline{(p-1)!} = -1$.

(b) Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$, on a : $\overline{p_k} = \left(\overline{k^2}\right)^{-1}$.

(c) Montrer que : $\sum_{k=1}^{p-1} \left(\overline{k^{-1}}\right)^2 = \sum_{k=1}^{p-1} \overline{k}^2$. Conclure quant à la divisibilité de $\sum_{k=1}^{p-1} p_k$ par p.

Question 2.3. On rappelle que $\frac{a_p}{b_p}$ est la fraction irréductible représentant le rationnel $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}$. Exprimer $pb_p \sum_{k=1}^{p-1} p_k$ en fonction de a_p. Qu'en conclut-on ?

3 Exo Centrale 2

Question 3.1. Utiliser le logiciel de calcul formel pour exprimer, pour tout couple d'entier $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$$

à l'aide des factorielles $n!$, $m!$ et $(n+m+1)!$.

Question 3.2. Soient a et b deux réels.

(a) Démontrer que la série de terme général $\frac{an+b}{2^n\binom{3n}{n}}$ est convergente.

(b) Démontrer à l'aide de la question 1. l'existence d'un polynôme $P_{a,b}$ à préciser tel que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{an+b}{\binom{n}{3n}2^n} = \int_0^1 \frac{P_{a,b}(x)}{(x-2)^3(x^2+1)^3}dx$$

On pourra utiliser le logiciel de calclul formel pour le calcul de certaines sommes de séries.

(c) À l'aide du logiciel de calcul formel, déterminer alors deux réels rationnels a et b tels que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{an+b}{2^n\binom{n}{3n}} = \pi$$